

Ceci n'est pas un poly¹

HLIN201

S everine BÉRARD
2015-16

L'absentéisme nuit gravement
  la compréhension

1. Ce document ne constitue en aucun cas le cours *HLIN201 De la combinatoire aux graphes*.

Sommaire de ce livret

Ce livret regroupe différents documents utilisés en cours et en TD. Vous y trouverez :

1. Un descriptif du cours *HLIN201 De la combinatoire aux graphes* **p. 3**
2. Des fiches utilisées en cours **p. 4**
3. Des auto-évaluations **p. 12**
4. Des feuilles d'exercices utilisées en TD **p. 20**

Les diapositives passées en cours sont mises à disposition au fur et à mesure sur l'espace pédagogique.

HLIN201 : De la combinatoire aux graphes

1 Organisation

Responsable du module : Sèverine Bérard - maîtresse de conférences - département informatique de la Fac De Sciences (FDS) - ISEM (bât. 22)

Contact : Severine.Berard@umontpellier.fr (*pensez à indiquer HLIN201 et votre nom dans vos mails*)

Espace pédagogique : Le site du module est sur la plate-forme Claroline de l'UM (accessible via l'ENT)

Modalités de contrôle des connaissances (MCC)

- Écrit (60 %) : 2h organisé par la FDS avec session de rattrapage
- CC (40 %) : contrôle continu de TD organisé par chaque chargé de TD (1 contrôle TD + 1 à 2 relevés d'exercice/étudiant + 1 relevé de notes de cours/étudiant + éventuellement d'autres contrôles/devoirs maison/évaluations + prise en compte de l'assiduité et de la participation)

Note finale = $\max((0.6 * \text{Écrit} + 0.4 * \text{CC}); \text{Écrit})$

Document autorisé pour les évaluations : une feuille A4 manuscrite recto-verso

Emploi du temps 19,5 heures de cours (13 séances). 30 heures de TD (20 séances).

Chargée cours : Sèverine Bérard; *amphi commun* : vendredi 8h00 en A6.02

Chargés de TD : Anne-Élisabeth Baert, Sèverine Bérard, Annie Chateau, Sylvain Daudé et Konstantin Todorov

Assiduité et convenances

- La présence en cours et en TD est **très fortement** recommandée
- Si vous arrivez en retard, merci de rentrer par le haut de l'amphi
- N'hésitez pas à poser des questions pendant le cours
- Vos téléphones portables devront être éteints (pas juste sur silencieux) et rangés lors des cours et des TD
- Bien sûr, on ne lit pas le journal pendant les cours et TD, *etc.*

2 Pédagogie

Le cours se compose de deux parties, la première axée sur la combinatoire, la seconde sur les graphes.

1. Dans la première partie, nous reverrons les notions d'ensemble, de relation binaire, de fonction et d'application, vues au 1^{er} semestre dans le module Calculus. Nous aborderons la cardinalité des ensembles et différentes techniques de dénombrement. Nous reverrons les concepts de raisonnement par récurrence, vus en Calculus. Nous verrons une nouvelle manière de définir les ensembles, par induction, ainsi que les preuves par induction structurelle associées à ce type d'ensemble. Enfin, nous verrons différentes caractéristiques des relations binaires, en particulier les relations d'équivalence et d'ordre.
2. Dans la seconde partie, nous introduirons un nouveau concept, les graphes, nous aborderons leur différentes propriétés et mettrons en œuvre les principes de preuves vus en première partie pour raisonner sur ces graphes.

Les buts de ce module, au delà d'introduire le concept fondamental en informatique qu'est l'objet graphe, sont de vous familiariser avec l'abstraction mathématique nécessaire à toute branche de l'informatique, de vous apprendre à raisonner – *essentiel*, même dans la vie de tous les jours – et à écrire des preuves valides de propriétés.

Bibliographie Mathématiques pour l'informatique : avec 309 exercices corrigés. André Arnold et Irène Guesarian. 4e édition - Paris : ÉdiScience, impr. 2005. Chapitres 1 - 2 - 3 - (10)

~ 20 exemplaires disponibles à la BU

Tous les documents distribués en cours sont aussi sur l'espace pédagogique. Le surplus sera déposé au département informatique (bât. 16), dans le casier prévu à cet effet, *i.e.* avec l'étiquette HLIN201.

Fiches de cours

1 Rédaction des preuves

Les raisonnements par récurrence/induction sont similaires, on adopte la structure suivante pour la rédaction des preuves :

- Écrire la propriété à prouver : Soit $P(\mathbf{n}) = \text{''bla bla bla } \mathbf{n} \text{ bla bla''}$
- puis 3 étapes “étiquetées”, ici pour les récurrences :
 1. **Base** : Montrer que $P(\mathbf{n}_0)$ est vraie pour un certain $\mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}$ que vous aurez déterminé
 2. **Récurrence** : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1) \forall n \geq n_0$
Hypothèse de Récurrence (HR) : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un $n \geq n_0$
bla bla bla HR bla bla donc $P(n+1)$ est vraie
 3. **Conclusion** : on a montré que $P(n_0)$ est vraie et que $P(n) \Rightarrow P(n+1) \forall n \geq n_0$, donc par le principe de récurrence on a $\boxed{P(n) \text{ vraie } \forall n \geq n_0}$
- Pour les raisonnements par induction, peu de changements : Soit $P(\mathbf{n}) = \text{''bla bla bla } \mathbf{n} \text{ bla bla''}$
 1. **Base** : Montrer que $P(\mathbf{n}_0)$ est vraie pour un certain $\mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}$ que vous aurez déterminé
 2. **Induction** : Montrons que $(\forall k \in [n_0..n] P(k)) \Rightarrow P(n+1) \forall n \geq n_0$.
Hypothèse d'Induction (HI) : On suppose que $P(k)$ est vraie $\forall k \in [n_0..n]$ pour un $n \geq n_0$
bla bla bla HI bla bla donc $P(n+1)$ est vraie
 3. **Conclusion** : on a montré que $P(n_0)$ est vraie et que $(\forall k \in [n_0..n] P(k)) \Rightarrow P(n+1) \forall n \geq n_0$, donc par le principe d'induction on a $\boxed{P(n) \text{ vraie } \forall n \geq n_0}$

2 Raisonnements par récurrence/induction sur \mathbb{N}

Les phrases suivantes sont des morceaux de 2 raisonnements tirés de wikipédia, l'un par induction et l'autre par récurrence, il vous faut les séparer, les remettre dans le bon ordre et y ajouter les mots clés : **Base** *2, **Récurrence**, **Induction**, **HR**, **HI**, **Conclusion***2. Effectuez cet exercice dans le tableau ci-après.

Rmq : Les entiers impairs sont les entiers de la forme $2n - 1$ (le premier, obtenu pour $n = 1$, est 1).

- A** On suppose que $P(k)$ est vraie $\forall k \in [2..n]$ pour un $n \geq 2$
- B** Considérons la somme $1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$ constituée de $n + 1$ entiers impairs. D'après **HR** $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$, on a donc $1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, ce qui démontre que $P(n + 1)$ est vraie.
- C** Soit $P(n)$: “la somme des n premiers entiers impairs est égale au carré de n : $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.”
- D** On a montré que $P(2)$ est vraie et que $(\forall k \in [2..n] P(k)) \Rightarrow P(n + 1) \forall n \geq 2$, donc par le principe d'induction on a $\boxed{P(n) \text{ vraie } \forall n \geq 2}$
- E** On suppose $P(n)$ vraie pour un $n \geq 1$, c.-à-d. que $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
- F** Soit $P(n)$: “ n possède un diviseur premier”
- G** Prenons $n_0 = 1$, $2 \times 1 - 1 = 1^2$, donc $P(1)$ vraie
- H** Prenons $n_0 = 2$, 2 possède un diviseur premier qui est lui-même, donc $P(2)$ est vraie.
- I** Montrons que $(\forall k \in [2..n] P(k)) \Rightarrow P(n + 1) \forall n \geq 2$.
- J** On a montré que $P(1)$ est vraie et que $P(n) \Rightarrow P(n + 1) \forall n \geq 1$, donc par le principe de récurrence on a $\boxed{P(n) \text{ vraie } \forall n \geq 1}$.
- K** Considérons $n + 1$:
- ou bien $n + 1$ est premier alors il possède un diviseur premier qui est lui-même
 - ou bien $n + 1$ n'est pas premier, alors il admet un diviseur p avec $p \neq 1$ et $p \neq n + 1$ et on peut écrire $n + 1 = p \times q$ avec $p, q \in [2..n]$. D'après **HI** p possède un diviseur premier, celui-ci est aussi diviseur de $n + 1$, donc $P(n + 1)$ est vraie.
- L** Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n + 1) \forall n \geq 1$.

Tout entier ≥ 2 possède un diviseur premier	La somme des n premiers entiers impairs = n^2

3 Se cache-t-il un raisonnement par récurrence correct parmi les suivants ?

Tout raisonnement correct prouve une propriété juste mais toute propriété juste peut être (mal) prouvée par un raisonnement incorrect. L'idée de cette section est d'appréhender le fait que des raisonnements peuvent être incorrects ; il est plus facile de le vérifier sur des propriétés fausses.

3.1 9 divise $(10^n + 1)$ pour $n \geq 8$

Soit $P(n)$: "9 divise $(10^n + 1)$ ".

Base : prenons $n_0 = 8$, $(10^8 + 1) = 81 = 9 * 9$, 9 divise bien $(10^8 + 1)$, donc $P(8)$ est vraie

Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1) \forall n \geq 8$.

HR : On suppose $P(n)$ vraie pour un $n \geq 8$, c.-à-d. 9 divise $(10^n + 1)$

Montrons que 9 divise aussi $(10^{n+1} + 1)$.

$$(10^{n+1} + 1) = 10 \cdot 10^n + 1 = 10 \cdot 10^n + 1 + 9 - 9 = 10 \cdot 10^n + 10 - 9 = 10(10^n + 1) - 9$$

Par **HR** $(10^n + 1)$ est divisible par 9, donc $10(10^n + 1)$ est divisible par 9, 9 est bien sûr divisible par 9. La différence de deux nombres divisibles par 9 étant divisible par 9 : $10(10^n + 1) - 9 = 10^{n+1} + 1$ est divisible par 9. Donc $P(n+1)$ vraie.

Conclusion : on a montré que $P(8)$ est vraie et que $P(n) \Rightarrow P(n+1) \forall n \geq 8$, donc par le principe de récurrence on a $\boxed{P(n) \text{ vraie } \forall n \geq 8}$

◆ Ce raisonnement est CORRECT ou INCORRECT ? Pourquoi ?

3.2 Tous les entiers naturels sont égaux²

Soit $P(n)$: "Si $\max(a, b)$ est inférieur ou égal à n , alors $a = b$ avec $a, b, n \in \mathbb{N}$ ".

Base : prenons $n_0 = 0$, si $\max(a, b)$ est inférieur ou égal à 0, c.-à-d. si le plus grand entier entre a et b vaut 0, alors ils sont forcément tous deux égaux à 0 (ne pouvant pas être plus petits) et donc ils sont aussi égaux entre eux.

Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1) \forall n \geq 0$.

HR : On suppose $P(n)$ vraie pour un $n \geq 0$, c.-à-d. que si $\max(a, b)$ est inférieur ou égal à n , alors $a = b$.
Considérons deux nombres c et d tels que $\max(c, d)$ est inférieur à égal à $n+1$. Alors $\max(c-1, d-1)$ est inférieur ou égal à n et donc d'après **HR** on a $c-1 = d-1$ et donc $c = d$. On a bien $P(n+1)$ vraie.

Conclusion : on a montré que $P(0)$ est vraie et que $P(n) \Rightarrow P(n+1) \forall n \geq 0$, donc par le principe de récurrence on a $\boxed{P(n) \text{ vraie } \forall n \geq 0}$

À présent, prenons deux entiers naturels A et B et notons C le maximum entre A et B . On a $\max(A, B) \leq C$, $C \in \mathbb{N}$, donc en appliquant $P(C)$, on obtient $A = B$. Ainsi, deux entiers sont toujours égaux !

◆ Ce raisonnement est CORRECT ou INCORRECT ? Pourquoi ?

2. Tiré du site [Le coin des amateurs](http://maths.amatheurs.fr/index.php?page=majorations) (<http://maths.amatheurs.fr/index.php?page=majorations>)

3.3 $2^n \geq n + 1$ pour $n \geq 0$

Soit $P(n)$: " $2^n \geq n + 1$ ".

Base : prenons $n_0 = 0$, on a $2^0 = 1 \geq 0 + 1$ donc $P(0)$ est vraie

Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n + 1) \forall n \geq 0$.

HR : On suppose $P(n)$ vraie pour un $n \geq 0$, c.-à-d. que $2^n \geq n + 1$.

Nous devons prouver que $P(n + 1)$ est vraie : $2^{n+1} = 2 \times 2^n$, or $2 \geq 1$ et par **HR** on a $2^n \geq n + 1$, donc $2 \times 2^n \geq 2 \times (n + 1)$ soit $2^{n+1} \geq 2 \times (n + 1)$, ou encore $\underline{2^{n+1} \geq 2n + 2}$.

$n \geq 0$ donc $2n + 2 \geq n + 2$, c.-à-d. $\underline{2n + 2 \geq n + 1 + 1}$.

En combinant ces deux inéquations, on obtient $2^{n+1} \geq (n + 1) + 1$, donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : on a montré que $P(0)$ est vraie et que $P(n) \Rightarrow P(n + 1) \forall n \geq 0$, donc par le principe de récurrence on a $\boxed{P(n) \text{ vraie } \forall n \geq 0}$.

◆ Ce raisonnement est CORRECT ou INCORRECT ? Pourquoi ?

3.4 Tout le monde a le même âge

Soit $P(n)$: "Dans un groupe de n personnes, tout le monde a le même âge".

Base : prenons $n_0 = 1$, dans un groupe constitué d'une seule personne tout le monde a bien sûr le même âge, donc $P(1)$ vraie

Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n + 1) \forall n \geq 1$.

HR : On suppose $P(n)$ vraie pour un $n \geq 1$, c.-à-d. que dans tout groupe de n personnes, tout le monde a le même âge.

Soit G un groupe de $n + 1$ personnes que l'on numérote de 1 à $n + 1$. Soit G_1 (resp. G_2) le groupe formé des n premières (resp. dernières) personnes de G . D'après **HR** toutes les personnes de G_1 (resp. G_2) ont le même âge. Or la personne numéro n est à la fois dans G_1 et G_2 . Donc tous les gens de G ont le même âge que la personne n , ce qui démontre que $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : on a montré que $P(1)$ est vraie et que $P(n) \Rightarrow P(n + 1) \forall n \geq 1$, donc par le principe de récurrence on a $\boxed{P(n) \text{ vraie } \forall n \geq 1}$, c.-à-d. dans un groupe de n personnes, tout le monde a le même âge !

◆ Ce raisonnement est CORRECT ou INCORRECT ? Pourquoi ?

3.5 Tout réseau routier constitué de n villes et $n - 1$ liaisons routières est connexe

Soit $P(n)$: "Tout réseau routier constitué de n villes et $n - 1$ liaisons routières (routes entre deux villes différentes) est connexe, c.-à-d. qu'on peut aller de n'importe quelle ville du réseau à n'importe quelle autre ville du réseau en suivant les liaisons routières".

Base : prenons $n_0 = 2$, le réseau routier constitué de deux villes et d'une liaison routière est bien connexe

Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n + 1) \forall n \geq 2$.

HR : On suppose $P(n)$ vraie pour un $n \geq 2$, c.-à-d. que tout réseau de n villes et $n - 1$ liaisons routières est connexe

Soit R un réseau routier de n villes et $n - 1$ liaisons routières, d'après **HR**, R est connexe. Soit v une ville et l une liaison routière, je construis R_1 en reliant v à une des villes de R par l . R_1 a $n + 1$ villes et n liaisons routières. R étant connexe, on peut aller de n'importe quelle ville de R_1 à n'importe quelle autre ville de R_1 par les liaisons routières. Donc $P(n + 1)$ vraie.

Conclusion : on a montré que $P(2)$ est vraie et que $P(n) \Rightarrow P(n + 1) \forall n \geq 2$, donc par le principe de récurrence on a $\boxed{P(n) \text{ vraie } \forall n \geq 2}$

◆ Ce raisonnement est CORRECT ou INCORRECT ? Pourquoi ?

Propriété 1 Soient A, B deux ensembles finis : $|A| \leq |B|$ si et seulement si il existe une application injective $f : A \rightarrow B$.

Preuve : Dans tout ce qui suit A et B sont deux ensembles finis.

L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ équivaut à la conjonction des deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Pour prouver une équivalence on peut donc prouver les deux implications.

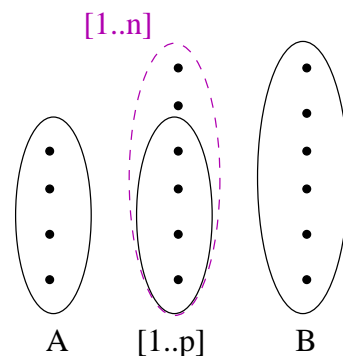
- Montrons que $|A| \leq |B| \Rightarrow$ il existe une application injective $f : A \rightarrow B$
 (*pour prouver qu'il en existe une il va donc falloir essayer d'en construire une*)

— Soient $|A| = p$ et $|B| = n$, on a

— Soient deux bijections :

— Comme $p \leq n$,

— Alors $g = f_B \circ f$, c.-à-d.



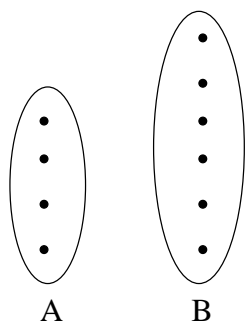
Schéma

est bien injective

- Montrons que l'existence d'une application injective $f : A \rightarrow B \Rightarrow |A| \leq |B|$

— Soit $f : A \rightarrow B$ une application injective

— Alors $f(A)$, est une partie de B à n éléments, c.-à-d. que



Schéma

— Appelons

— On utilise le principe d'additivité pour compter :

- Conclusion : on a montré que si $|A| \leq |B|$ alors il existe une application injective $f : A \rightarrow B$ et que s'il existe une application injective $f : A \rightarrow B$ alors $|A| \leq |B|$, donc $|A| \leq |B|$ si et seulement si il existe une application injective $f : A \rightarrow B$

□

Propriété 2 \mathbb{N} est le plus petit ensemble infini. Il est stable par addition, multiplication et exponentiation. Il est *bien ordonné* : toute partie non vide admet un plus petit élément.

L'argument diagonal : L'ensemble des parties de \mathbb{N} n'est pas dénombrable.

Preuve : Nous ne prouverons que le fait que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$.

1. Comment se représenter $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de \mathbb{N} ?

Par leur χ_P : une partie P de \mathbb{N} peut être représentée par

$$\chi_P :$$

Exemple : $\chi_{\{0,2,3\}} = 10101000\dots$. Cette fonction peut être vue comme une suite de 0 et de 1 :

Dans ce formalisme la suite 11011000... représente

Exercices :

- quelle partie de \mathbb{N} est représentée par 00000000... ?
- quelle partie de \mathbb{N} est représentée par 11111111... ?
- quelle partie de \mathbb{N} est représentée par 10101010... ?

2. Soit $E = \{\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$ l'ensemble des parties de \mathbb{N} . On a donc χ_P définissant
3. Nous allons **raisonner par l'absurde** : supposons que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est dénombrable, donc que E est dénombrable. Alors il existe une fonction f de E , c.-à-d. une


4. Soit la fonction diagonale $d : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ construite comme suit :

Remarquez que

5. Comme E est supposé dénombrable et comme \mathbb{N} est infini, d est une fonction/partie de \mathbb{N} de rang $k \in \mathbb{N}$, c.-à-d. que
6. Intéressons nous à la valeur $d(k)$:
 - d'après le point précédent
 - **MAIS** d'après la définition de d ,
 Cette **contradiction** permet d'affirmer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable, c.-à-d. que

□

1 Ensemble défini par induction

Nous définissons par induction un ensemble \mathcal{D} de dessins constitués de *pixels*, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}$ l'ensemble des dessins 2D. Un pixel est un carré, composé donc de 4 *côtés*, représentés en noir sur la figure ci-contre et d'un *intérieur*, représenté en grisé. 

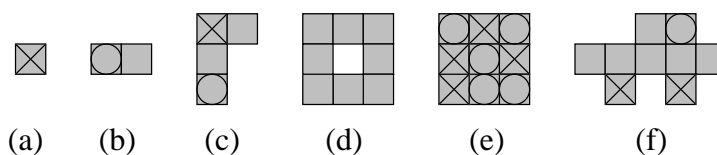
Soit \mathcal{D} l'ensemble défini par le schéma inductif suivant :

Base :  $\in \mathcal{D}$

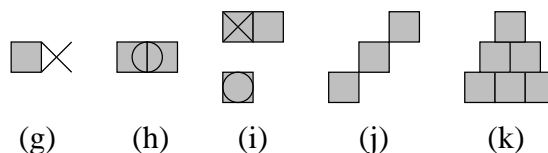
Règles :

- R1. si on juxtapose deux éléments de \mathcal{D} , sans chevauchement, par un côté de pixel, le nouvel élément obtenu est dans \mathcal{D}
- R2. si on dessine un symbole \bigcirc ou \times dans un pixel vide d'un élément de \mathcal{D} , le nouvel élément obtenu est dans \mathcal{D}

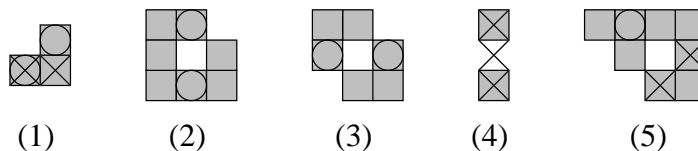
Quelques exemples d'éléments qui sont dans \mathcal{D} :



et quelques exemples d'éléments qui ne sont pas dans \mathcal{D} :



Que pensez-vous des éléments suivants, sont-ils dans \mathcal{D} ?



Plus formellement \mathcal{D} se définit de la manière suivante, où $K = \{\bigcirc, \times\}$:

Base :  $\in \mathcal{D}$

Règles :

1. R1 : $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$
 $(d_1, d_2) \mapsto$ la juxtaposition sans chevauchement de d_1 et d_2 par un côté de pixel
2. R2 : $K \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$
 $(k, d) \mapsto$ le dessin obtenu en ajoutant le symbole k à l'intérieur d'un pixel vide de d

D'après les définitions vues en cours, R1 est une règle dite interne et R2 est une règle dite externe.

2 Fonction définie par induction

Voici un exemple d'une application définie par induction sur l'ensemble \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} nbRond : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{N} \\ d &\mapsto \text{le nombre de ronds dans } d \end{aligned}$$

En considérant a, b, c, d, e et f les éléments de \mathcal{D} de la section précédente, on a : $nbRond(a) = nbRond(d) = 0$, $nbRond(b) = nbRond(c) = nbRond(f) = 1$ et $nbRond(e) = 5$.

$nbRond$ doit être définie précisément pour chaque élément de la base et pour chaque règle de construction de \mathcal{D} :

Base : $nbRond(\blacksquare) = 0$

Règles :

$$R1. nbRond(R1(d_1, d_2)) = nbRond(d_1) + nbRond(d_2)$$

$$R2. nbRond(R2(k, d)) = \begin{cases} 1 + nbRond(d) & \text{si } k = \bigcirc \\ nbRond(d) & \text{sinon} \end{cases}$$

3 Preuve par induction structurelle

Prouvons maintenant que tous les dessins de \mathcal{D} ont un nombre de ronds inférieur ou égal à leur nombre de pixels.

Soit $P(d)$: “Le dessin d a un nombre de ronds inférieur ou égal à son nombre de pixels”.

Nous devons montrer que $P(d)$ est vraie $\forall d \in \mathcal{D}$. Pour cela, il suffit de montrer que $P(d)$ est vraie pour tous les éléments d de la base de \mathcal{D} et que toutes les règles de construction R_i de \mathcal{D} respectent la propriété.

Base : il y a un seul élément dans la base, \blacksquare , qui a un pixel et aucun rond, donc $P(\blacksquare)$ est vraie

Règles :

R1. Supposons que d_1 et d_2 sont deux éléments de \mathcal{D} tels que $P(d_1) = P(d_2) = \text{Vrai}$, soit $d = R1(d_1, d_2)$, il faut montrer que $P(d)$ est vraie.

Soient p_1, p_2 et p le nombre de pixels de d_1, d_2 et d , et r_1, r_2 et r le nombre de ronds de d_1, d_2 et d .

— $P(d_1)$ vraie $\Rightarrow p_1 \geq r_1$

— $P(d_2)$ vraie $\Rightarrow p_2 \geq r_2$

Comme d_1 et d_2 ne se chevauchent pas dans d , $p = p_1 + p_2$ et $r = r_1 + r_2$. En combinant les deux inéquations précédentes on a $p_1 + p_2 \geq r_1 + r_2$ d'où $p \geq r$ et donc $P(d)$ est vraie.

$R1$ respecte bien la propriété P .

R2. Supposons que d est un élément de \mathcal{D} tel que $P(d) = \text{Vrai}$, il faut montrer que $P(R2(k, d))$ est vraie.

$P(d)$ vraie implique que le nombre de pixel de d , p_d , est supérieur ou égal au nombre de ronds de d , r_d .

Soit p le nombre de pixels de $R2(k, d)$ et r son nombre de rond. L'élément $R2(k, d)$ a le même nombre de pixel que d , $p = p_d$.

— Si k est une croix, $R2(k, d)$ a le même nombre de rond que d , $r = r_d$, donc $P(R2(k, d))$ est vraie dans ce cas.

— Dans le cas où k est un rond, il s'ajoute dans un pixel ne contenant pas de rond, ce qui signifie que $r_d < p_d$ et que $r = r_d + 1$, d'où $r_d = r - 1$ et $r - 1 < p_d$, donc $r - 1 < p$, autrement dit $r \leq p$ et $P(R2(k, d))$ est vraie.

$R2$ respecte bien la propriété P .

On a montré que P est vraie pour l'unique élément de la base de \mathcal{D} et qu'elle est respectée par les 2 règles de construction, donc $P(e)$ est vraie $\forall e \in \mathcal{D}$.

Auto-Évaluations

1 Ensembles

- L'ensemble vide n'a aucun élément, donnez ses deux notations :
- Que signifie $x \in E$?
- Que signifie $x \notin E$?
- Soit X l'ensemble contenant les 6 premiers entiers naturels $[0 \dots 5]$, donnez sa définition
 - en extension :
 - en compréhension :
- On peut écrire un ensemble infini en extension VRAI/FAUX
- On peut écrire un ensemble infini en compréhension VRAI/FAUX
- On peut écrire un ensemble fini en extension VRAI/FAUX
- On peut écrire un ensemble fini en compréhension VRAI/FAUX
- Reliez les définitions à leur notation :

- | | | |
|--|--|-----------------------|
| | 1) chaque élément de A est élément de B • | • $A = B$ |
| | 2) A est un élément de B • | • $A \subseteq B$ |
| 3) il y a un élt de A qui n'est pas élt de B ou un élt de B qui n'est pas élt de A • | | • $A \neq B$ |
| | 4) A est inclus dans B et B est inclus dans A • | • $A \in B$ |
| | 5) A est inclus dans B et A est différent de B • | • $A \not\subseteq B$ |
| 6) il y a au moins un élément de A qui n'est pas élément de B • | | • $A \subsetneq B$ |

- $\{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} =$

- Opérations sur les ensembles, reliez les définitions à leur notation et donnez le nom de l'opération

Noms	Définitions	Notations
1)	$\{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ •	• $A \cup B$
2)	$\{x \mid x \in B \text{ et } x \notin A\}$ •	• $A \cap B$
3)	$\{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$ •	• $A \times B$
4)	$\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ •	• \overline{A}^E
5)	$\{x \mid x \in E \text{ et } x \notin A\}$ pour $A \subseteq E$ •	• $B \setminus A$

- Lorsque deux ensembles n'ont aucun élément commun, leur intersection est Les ensembles sont dits ...

- Placez **paire** et **couple** dans la phrase suivante :

Un(e) ... est un ensemble à 2 éléments, par exemple $\{a, b\}$, alors qu'un(e) ... est un 2-uplet, par exemple (a, b) . Deux ... s (a, b) et (c, d) sont éga(ux/les) ssi $a = c$ et $b = d$, alors que deux ... s $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ sont éga(ux/les) ssi $(a = c \text{ et } b = d)$ ou $(a = d \text{ et } b = c)$.

- Une *partition* P d'un ensemble E est :

1. un ensemble non ... P de parties non ... de E
2. les parties sont toutes ... : si $A_i \neq A_j$ sont deux parties éléments de P , alors $A_i \cap A_j = \{\}$.
3. les parties éléments de P recouvrent E : si $P = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ alors ... , se note aussi $\bigcup_{i \in 1..n} A_i = E$.

2 Relation binaire, fonction, application

Une *relation binaire* \mathcal{R} d'un ensemble X vers un ensemble Y est définie par un s... -e... du p... c... $X \times Y$, appelé le ... de la relation.
 Pour $(x, y) \in \mathcal{R}$, on note ... et on dit que x et y sont en *relation*.

Une relation binaire f de X vers Y est ... si pour tout $x \in X$, il existe *au plus un* élément ... en relation avec x .

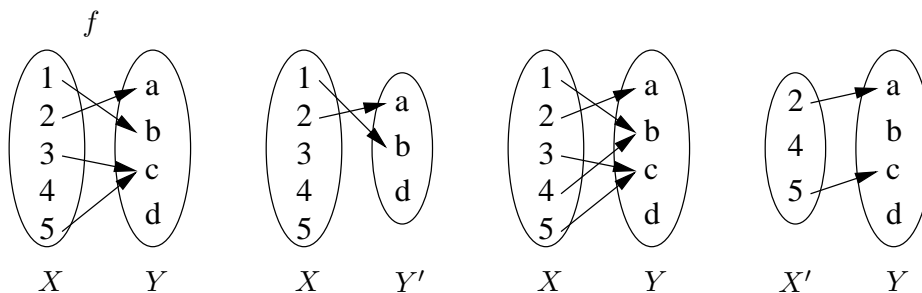
- f est incluse dans $X \times Y$ ($f \subseteq X \times Y$) VRAI/FAUX
- X est l'ensemble de ... et Y l'ensemble ...
- L'ensemble $Dom(f) = \{x \in X \mid \exists y \in Y \text{ avec } y = f(x)\}$ est le ... ou e... de d... de f , $Dom(f) \subseteq X$.
- L'ensemble $Im(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ avec } y = f(x)\}$ est l'... de f , $Im(f) \subseteq Y$.
- **L'**... de $x \in X$ par f est l'élément y de Y tel que $y = f(x)$.
- **Un** ... par f d'un élément y de Y est un élément x tel que $y = f(x)$.

On se donne une fonction $f : X \rightarrow Y$. Soit A une partie de X et B une partie de Y .

- ... de A par $f : f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ avec } y = f(x)\}$ ($f(A)$ est l'ensemble des ... par f des éléments de A),
- ... de B par $f : f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ ($f^{-1}(B)$ est l'ensemble des ... par f des éléments de B).
- Reconstituer les deux paires de termes égaux parmi les suivants : $Dom(f)$, $Im(f)$, $f(X)$ et $f^{-1}(Y)$.

Une fonction f de X vers Y est une ... si son domaine est l'ensemble X tout entier : $Dom(f) = X$. L'ensemble des ... de X vers Y est noté ... ou $\{X \rightarrow Y\}$.

Placez les termes restriction de f , co-restriction de f et prolongement de f en dessus des dessins appropriés :



Reliez les termes à leur définitions :

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1) Une application est injective • | • si chaque élément $y \in Y$ a <u>au plus un</u> antécédent |
| 2) Une application est bijective • | • si chaque élément $y \in Y$ a <u>au moins un</u> antécédent |
| 3) Une application est surjective • | • si chaque élément $y \in Y$ a <u>exactement un</u> antécédent |

Un cas particulier classique : une partie A d'un ensemble E donne lieu à la ... , qui est définie comme suit

$$\chi_A : E \rightarrow \{0, 1\}$$

$$e \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } e \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 Ensembles définis par induction ou en compréhension

Reliez entre eux les ensembles identiques :

Ensembles définis par induction	Ensembles définis en compréhension
E_1 Base : $\{0\}$ Règle : si $n \in E_1$ alors $n + 2 \in E_1$ •	• $Pair = Mul2 = \{2 * n \mid n \in \mathbb{N}\}$
E_2 Base : $\{1\}$ Règle : si $n \in E_2$ alors $n + 2 \in E_2$ •	• $Mul6 = \{6 * n \mid n \in \mathbb{N}\}$
E_3 Base : $\{2\}$ Règle : si $n \in E_3$ alors $2 * n \in E_3$ •	• $Impair = \mathbb{N} \setminus Pair = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
E_4 Base : $\{6\}$ Règle : si $n \in E_4$ et $k \in \mathbb{N}$ alors $k * n \in E_4$ •	• $\mathbb{N} \setminus Mul6$
E_5 Base : $\{0,6\}$ Règle : si $n, m \in E_5$ alors $n + m \in E_5$ •	• $Puiss2 = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
E_6 Base : $\{1\}$ Règle : si $n \in E_6$ et $k \in (\mathbb{N}^* \setminus Mul2 \setminus Mul3)$ alors $k * n \in E_6$ •	• $Mul3 = \{3 * n \mid n \in \mathbb{N}\}$

2 Ensembles définis inductivement

Intuitivement, la définition inductive d'une partie E d'un ensemble \mathcal{U} consiste en la donnée explicite de certains éléments de l'ensemble E , la *base*, et de moyens de construire de nouveaux éléments de E à partir d'éléments de E déjà connus, les *règles*. Les règles sont des fonctions.

- $E \in \mathcal{U}$ ou $E \subseteq \mathcal{U}$?
- La base peut-être vide ? VRAI/FAUX
- La base peut contenir un seul élément ? VRAI/FAUX
- La base peut contenir plusieurs éléments ? VRAI/FAUX
- Les règles de construction peuvent-être des fonctions de $E^m \rightarrow E$? VRAI/FAUX
- Les règles de construction peuvent-être des fonctions de $K_1 \times \dots \times K_q \times E \times \dots \times E \rightarrow E$, où $K_1, \dots, K_p \subseteq \mathcal{U}$ des ensembles parfaitement définis ? VRAI/FAUX
- Les règles de construction peuvent-être des fonctions de $K^q \rightarrow E$? VRAI/FAUX

3 Preuve par induction structurale

Une démonstration par induction structurale se fait sur le schéma suivant : soit E un ensemble défini par induction à partir de (\mathcal{B}, Ω) . Soit $P : E \rightarrow Booléen$ la propriété qu'on veut démontrer. Pour montrer que $P(x)$ est vraie pour chaque élément x de E , il suffit de prouver que P est vraie pour chaque élément de la base \mathcal{B} et que P est *conservée* par applications des règles de constructions de Ω .

- Ω est une fonction ou un ensemble de fonctions ?
- $\mathcal{B} \in E$ ou $\mathcal{B} \subseteq E$?
- P doit être prouvée pour une seule règle de construction ? VRAI/FAUX
- P doit être prouvée pour chaque règle et chaque élément de la base, c.-à-d. il y $|\mathcal{B}| \times |\Omega|$ preuves à faire ? VRAI/FAUX
- Peut-on borner le nombre de preuves à faire par $|\mathcal{B}| + |\Omega|$? VRAI/FAUX

1 Définitions

1.1 Marche, chemin, cycle

- Une marche est ...
- Une marche peut-être de longueur nulle. VRAI/FAUX
- Une marche a forcément deux extrémités distinctes. VRAI/FAUX
- Un chemin est une marche qui ne passe pas ...
- De toute xy -marche on peut extraire un ...
- Un cycle est ...
- De toute marche fermée ayant des arêtes distinctes et passant par une arête $e = \{x, y\}$, on peut extraire un ... passant par e

1.2 Connexité

Soit $G = (X, E)$ un graphe.

- G est connexe ssi ...
- La relation de connexité est une relation ... sur X
- Un point d'articulation est un sommet x de X tel que ...
- Un sous-graphe de G connexe et dont tous les sommets sont de degrés 2 est ...

1.3 Arbre

- Un arbre est un graphe ...
- Un sommet pendant est ...

2 Règle de construction

2.1 $G + x$

On va construire un nouveau graphe $G + x = G' = (X', E')$ en ajoutant un nouveau sommet x "relié" à G et tel que :

1. $x \dots X$
2. $X' = \dots$
3. $E' \dots$

2.2 " $G - x$ "

- À l'oral on dit G moins x , quel est ce graphe précisément ?
- Pour un graphe $G = (X, E)$ et un sommet $x \notin X$, combien de graphe $G + x$?
- Pour un graphe $G = (X, E)$ et un sommet $x \in X$, combien de graphe " $G - x$ " ?

3 Ensembles définis inductivement

Graphes connexes Ensemble \mathcal{GC}

Base ...

Induction ...

Arbres Ensemble \mathcal{T}

Base ...

Induction ...

Preuves Pour montrer que \mathcal{GC} est bien l'ensemble des graphes connexes, on doit montrer

1. que tous les éléments de ... sont des graphes On fait ça par ... car ... est un ensemble défini inductivement
2. que tout graphe ... G est élément de On fait ça par ... sur le nombre de sommets de G .

4 Lemmes et théorème

Lemme fondamental des graphes connexes Tout graphe ... d'ordre ... contient au moins ... qui ne sont pas des points ...

Lemme Existence Sommet Pendant – ESP Soit $G = (X, E)$ un graphe contenant $n \geq 2$ sommets et m arêtes. L'un ou l'autre des conditions qui suivent entraîne l'existence dans G d'au moins ... sommets ... :

1. G est ... et sans cycle
2. G est ... et $m = n - 1$
3. G est connexe et ...

Lemme Propriétés Retrait Sommet Pendant – PRSP Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe d'ordre ... et contenant un sommet pendant x . Alors $G(X \setminus \{x\})$ est
Si de plus G est sans cycle alors

Petit théorème des arbres Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. T est un arbre
2. T est un graphe ... d'ordre $n \geq 1$ et ...
3. T est un graphe ... d'ordre $n \geq 1$ et ...

Démonstration On veut démontrer l'équivalence de 3 propriétés (i), (ii) et (iii), cela revient à montrer que :

1. (i) \Rightarrow (ii) et (ii) \Rightarrow (iii) VRAI/FAUX
2. (i) \Rightarrow (ii) et (ii) \Rightarrow (iii) et (iii) \Rightarrow (i) VRAI/FAUX
3. (i) \Rightarrow (ii) et (ii) \Rightarrow (i) et (i) \Rightarrow (iii) et (iii) \Rightarrow (i) VRAI/FAUX

1 Définitions

1.1 Marche orientée, chaîne, circuit

- Une marche orientée est ...
- Une chaîne est une marche orientée qui ne passe pas ...
- De toute xy -marche orientée on peut extraire une ...
- Une marche orientée est ... si elle passe exactement une fois par chaque arc de G .
- Une marche orientée est ... si elle passe exactement une fois par chaque sommet de G .
- Un circuit est ...
- Un circuit est invariant par rotation. VRAI/FAUX
- Un circuit est invariant par retournement. VRAI/FAUX
- De toute marche orientée fermée passant par un arc $a = (x, y)$, on peut extraire un ... passant par a

1.2 Cycle, connexité, arbre

- Un cycle dans un graphe orienté G est ...
- Un circuit est un cycle. VRAI/FAUX
- Un cycle est un circuit . VRAI/FAUX
- G est connexe ssi ...
- Un point d'articulation est un sommet x de X tel que ...
- Un graphe orienté G est un arbre s'...

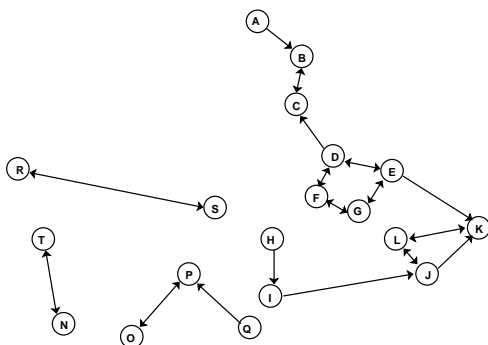
1.3 Arborescences

- $Desc_G(x)$ est l'ensemble des ... d'un sommet x , c'est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une ...
- $Asc_G(x)$ est l'ensemble des ... d'un sommet x , c'est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une ...
- Une racine r de $G = (X, U)$ est un sommet tel que ...
- Un graphe orienté G est une arborescence si G est un ...

1.4 Forte connexité

- x et y sont en relation de forte connexité ssi il existe une ... et une ... dans G .
- La relation de forte connexité est une relation ... sur X .
- Ses classes d'équivalence sont appelées composantes ... de G .
- Le graphe réduit de G est le graphe ... de G par la partition des sommets induite par la relation de forte connexité.

Entourez les composantes fortement connexes du graphe ci-contre et dessinez le graphe réduit



1.5 Fermetures

- La fermeture ... d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe obtenu en rajoutant une boucle sur chaque sommet.
- La fermeture ... d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe $G^* = (X, U^*)$ avec $(x, y) \in U^* \Leftrightarrow$ il existe une xy -marche orientée dans G de longueur ≥ 0 .
- La fermeture ... d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe $G^t = (X, U^t)$ avec $(x, y) \in U^t \Leftrightarrow$ il existe une xy -marche orientée dans G de longueur ≥ 1 .

2 Ensembles définis inductivement

Arborescences - Schéma 1 Ensemble \mathcal{A}

Base ...

Induction (un dessin peut suffire)...

Arborescences - Schéma 2 Ensemble \mathcal{A}

Base ...

Induction (un dessin peut suffire)...

3 Propriété et théorèmes

Propriété Tout graphe $G = (X, U)$ possédant une ... r est ...

Caractérisation des arborescences Pour un graphe orienté $G = (X, U)$ d'ordre n , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) G est une arborescence
- (ii) G est sans ... et possède une ...
- (iii) G a une ... et ... arcs.
- (iv) G a une ... r et $\forall x \in X$, il existe une seule ...
- (v) G est ... et $\exists x_0 \in X$ tq $d^-(x_0) = 0$ et $\forall x \neq x_0, \dots$
- (vi) G est sans ... et $\exists x_0 \in X$ tq ... et $\forall x \dots, d^-(x) = \dots$

Théorème Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté d'ordre n . G possède une ... $\Leftrightarrow G$ possède un ... couvrant qui est une ...

Théorème Le graphe réduit d'un graphe orienté est un graphe sans ...

Feuilles d'exercices

1 Ensembles

Notations et rappels : Un ensemble est une collection d'objets distincts où l'ordre n'a pas d'importance.

- L'ensemble vide, noté $\{\}$ ou \emptyset , n'a aucun élément
- Exemples : $A = \{1, 2, 3\}$ est un ensemble non vide défini en extension, $1 \in A$ et $a \notin A$;
 $Pair = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{pair}(n)\}$ est l'ensemble des entiers pairs défini en compréhension, $2 \in Pair$ et $3 \notin Pair$
- Comparaison d'ensembles (dans la suite E est l'ensemble de référence et A et B des parties de E)
 - A est inclus dans B , se note $A \subseteq B$, si $\forall x \in A, x \in B$
 - $A \not\subseteq B$ si la phrase précédente est fautive, ce qui s'écrit $\exists x \in A \mid x \notin B$
 - $A = B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$
 - $A \neq B$ s'il y a un élé de A qui n'est pas élé de B ou s'il y a un élé de B qui n'est pas élé de A
 - A est strictement inclus dans B si $A \subseteq B$ et $A \neq B$, se note $A \subsetneq B$ (attention différent de $A \not\subseteq B$)
- On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . On a par définition : $A \subseteq E$ ssi $A \in \mathcal{P}(E)$
Exemple : $C = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{P}(C) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- Opérations sur les ensembles
 - Union : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
 - Intersection : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$
 - Différence : $B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ et } x \notin A\}$
 - Complémentaire : $\overline{A}^E = E \setminus A$ pour $A \subseteq E$, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur E on note \overline{A}
 - Produit cartésien : $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$
- L'union et l'intersection sont des opérations
 - associatives : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
 - commutatives : $A \cap B = B \cap A$
 - distributives l'une par rapport à l'autre : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Loi de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Le produit cartésien se généralise à une famille finie d'ensembles :
 $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(e_1, e_2, \dots, e_n) \mid e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, \dots, e_n \in E_n\}$
 (e_1, e_2, \dots, e_n) est appelé un *n-uplet*. Autre notation souvent utilisée : E^m pour $E \times E \times \dots \times E$ m fois
- Une *partition* P d'un ensemble E est :
 1. un ensemble non vide P de parties non vides de E
 2. les parties sont toutes disjointes : si $A_i \neq A_j$ sont deux parties éléments de P , alors $A_i \cap A_j = \{\}$
 3. les parties élément de P recouvrent E : si $P = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ alors $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$

1. Soient A, B, C trois ensembles dans l'univers $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, avec $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Pour chacune des paires d'expressions suivantes, donnez si possible une valeur pour C de sorte que :
 - (a) Les deux expressions soient égales ;
 - (b) Les deux expressions soient différents.
 - i. $A \cup C$ et $A \cap C$
 - ii. $A \cap \overline{B}$ et $A \cap \overline{C}$
 - iii. $\overline{(A \cup B)}$ et $\overline{A} \cup \overline{C}$
 - iv. $A \cap B \cap C$ et $A \cap C$
2. Soient les ensembles A, B, C, D, E définis comme suit, dans l'ensemble \mathbb{N} :

$A = \mathbb{N}$	$D = \overline{C}$
$B = \emptyset$	$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ avec } n = 2m\}$
$C = \{0, 2, 4, 6\}$.	

 Pour chacune des expressions suivantes, retrouvez à quel ensemble elle correspond parmi A, B, C, D ou E :

$\overline{C} \cup \overline{D}$	$A \setminus C$	$E \cap C$
$A \setminus \overline{E}$	$B \cap \overline{D}$	$C \cup E$
3. Soient A, B, C, D des ensembles. Pour chacune des propositions suivantes, dites si elle est vraie ou fautive et justifiez votre réponse (un dessin peut suffire).

- (a) Si $A \subseteq B$ et $A \cap C \neq \emptyset$, alors $B \cap C = \emptyset$.
- (b) Si $A \subseteq B$ et $B \cap C = \emptyset$, alors $A \cap C = \emptyset$.
- (c) Si $A \subseteq B$ et $\overline{B} \cap C \neq \emptyset$, alors $\overline{A} \cap C \neq \emptyset$.
- (d) Si $B \subseteq A$, $C \subseteq D$ et $A \cap D = \emptyset$, alors $B \cap C = \emptyset$.
- (e) Si $A \subseteq B$, $D \subseteq C$ et $A \cap D = \emptyset$, alors $B \cap C = \emptyset$.
- (f) $A \cup B = A \Leftrightarrow A \cap B = B$.
4. Dessinez un ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et deux ensembles A et B , tels que $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cup B| = 5$ et $|A| < |B|$ (cardinal de A strictement plus petit que cardinal de B).
- Écrivez en extension $\mathcal{P}(A)$.
 - Donnez C_1, C_2 et C_3 , tels que $\{C_1, C_2, C_3\}$ soit une partition de E .

2 Relation binaire, fonction, application

Notations et rappels : Une *relation binaire* \mathcal{R} d'un ensemble X vers un ensemble Y est définie par un sous-ensemble du produit cartésien $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$, appelé le *graphe* de la relation.

- Pour $(x, y) \in \mathcal{R}$, on note $x\mathcal{R}y$ et on dit que x et y sont en *relation*
 - La relation *reciproque* d'une relation \mathcal{R} de A vers B est notée \mathcal{R}^{-1} . $\mathcal{R}^{-1} \subseteq B \times A$
 - Une relation binaire de X vers Y est *fonctionnelle* si pour tout $x \in X$, il existe *au plus un* élément $y \in Y$ en relation avec x
 - X est l'ensemble de *départ* et Y l'ensemble *d'arrivée*
 - $\text{Dom}(f) = \{x \in X \mid \exists y \in Y \text{ avec } y = f(x)\}$ est le *domaine* ou *ensemble de définition* de f , $\text{Dom}(f) \subseteq X$
 - $\text{Im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ avec } y = f(x)\}$ est l'*image* de f , $\text{Im}(f) \subseteq Y$
 - L'*image* de $x \in X$ par f est l'élément y de Y tel que $y = f(x)$
 - Un *antécédent* par f d'un élément y de Y est un élément x tel que $y = f(x)$
 - On se donne une fonction $f : X \rightarrow Y$. Soit A une partie de X et B une partie de Y
 - l'*image directe* de A par $f : f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ avec } y = f(x)\}$ ($f(A)$ est l'ensemble des images par f des éléments de A). Ex : $f(X) = \text{Im}(f)$
 - l'*image réciproque* de B par $f : f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ ($f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B). Ex : $f^{-1}(Y) = \text{Dom}(f)$
 - Une fonction f de X vers Y est une *application* si son domaine est l'ensemble X tout entier : $\text{Dom}(f) = X$. *Attention* : une application est une fonction mais une fonction n'est pas toujours une application.
 - Une application f est *injective* si chaque élément $y \in Y$ a au plus un antécédent. Elle est *surjective* si chaque élément $y \in Y$ a au moins un antécédent. Elle est *bijective* si c'est une application injective et surjective, c.-à-d. si chaque élément $y \in Y$ a exactement un antécédent
- On a donc :
- f est injective ssi $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, qui peut aussi s'énoncer par sa contraposée : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, autrement dit, chaque paire d'éléments distincts ont des images distinctes
 - f est surjective ssi $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tel que $y = f(x)$
 - f est bijective ssi $\forall y \in Y, \exists! x \in X$ tel que $y = f(x)$, c.-à-d. f est injective et surjective

1. Dans cet exercice $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$. On définit les applications

$$\begin{array}{ccc}
 f : E & \longrightarrow & F \\
 1 & \longmapsto & a \\
 2 & \longmapsto & a \\
 3 & \longmapsto & c
 \end{array}
 \qquad \text{et}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 g : F & \longrightarrow & E \\
 a & \longmapsto & 1 \\
 b & \longmapsto & 1 \\
 c & \longmapsto & 2 \\
 d & \longmapsto & 3
 \end{array}$$

- Représentez sur deux diagrammes sagittaux différents les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
- Pour chaque application $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$ vous indiquerez si elle est, ou pas, injective, surjective ou bijective.

- On rappelle que $(E \rightarrow F)$ ou F^E est l'ensemble des applications de E vers F . Peut-il exister une application de $(F \rightarrow E)$ qui soit injective? surjective? Si oui donnez un exemple, si non expliquez pourquoi.
 - Peut-il exister une application de $(E \rightarrow F)$ qui soit injective? surjective? Si oui donnez un exemple, si non expliquez pourquoi.
 - On suppose $s \in (E \rightarrow F)$ et $t \in (F \rightarrow E)$ telle que s soit non injective. Prouvez qu'alors $t \circ s$ est non injective.
 - On suppose $s \in (E \rightarrow F)$ et $t \in (F \rightarrow E)$ telle que t soit non injective et s soit injective. Est-il possible d'avoir $t \circ s$ bijective?
2. Dans cet exercice, on considère deux ensembles E et F , tels que $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$.
- (a) Dessinez une relation binaire \mathcal{R} de E vers F qui ne soit pas fonctionnelle, écrivez \mathcal{R} en extension.
 - (b) Dessinez une relation binaire fonctionnelle g de E vers F qui ne soit pas une application.
 - (c) Dessinez une application f de E vers F qui ne soit ni injective, ni surjective. Expliquez votre résultat.
 - (d) Soit l'application $m : E \rightarrow F$, avec $m = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c), (5, d)\}$.
 - m est-elle injective (justifiez)?
 - m est-elle surjective (justifiez)?
 - m est-elle bijective (justifiez)?
 - Soit $A \subseteq E$ avec $A = \{1, 2, 3\}$, que vaut $m(A)$?
 - Soit $B \subseteq F$ avec $B = \{a\}$, que vaut $m^{-1}(B)$?

3 Récurrences


Notations et rappels

- On rappelle les principes – équivalents – permettant de démontrer un prédicat $P : \mathbb{N} \rightarrow \text{Booléen}$

Base	Réurrence	Conclusion
$P(n_0)$	$\forall n \geq n_0 : (P(n) \Rightarrow P(n+1))$	$\forall n \geq n_0 : P(n)$
Base	Induction	Conclusion
$P(n_0)$	$\forall n \geq n_0 : ((\forall k : n_0 \leq k < n, P(k)) \Rightarrow P(n))$	$\forall n \geq n_0 : P(n)$

1. Montrez que la propriété suivante est vraie sur une partie de \mathbb{N} que vous déterminerez :

$$1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$$

2. On suppose que n est entier non nul. Soit un échiquier ayant 2^n cases par coté. On enlève une case de coin à cet échiquier. Un trimino est un morceau d'échiquier de la forme :  .
- (a) Faites un dessin pour $n = 1$ et $n = 2$, et montrez comment recouvrir cet échiquier auquel on a enlevé une case de coin par des triminos.
 - (b) Faites un dessin pour $n = 3$, et servez vous du résultat précédent pour montrer comment recouvrir cet échiquier auquel on a enlevé une case de coin par des triminos pour tout $n \geq 1$.
 - (c) Prouvez que l'on peut recouvrir par des triminos, un échiquier ayant 2^n cases par coté et auquel on a enlevé une case de coin.
 - (d) Prouvez que le recouvrement est possible quel que soit l'emplacement de la case que l'on enlève à l'échiquier.
 - (e) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N} : (2^{(2^n)} - 1)$ est divisible par 3).
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On rappelle que la somme des mesures en radians des angles d'un triangle est π .
- Montrez que la somme des mesures en radians des angles d'un polygone convexe à n cotés est $(n - 2)\pi$.

1 Cardinalité d'ensembles

Notations et rappels : Les ensembles que nous considérons sont *discrets*

— ou bien finis, comportant n éléments. On dit alors que leur *cardinal* est n . On note $\text{card}(E) = |E| = n$. Dans ce cas particulier, E est *équipotent* à $[1, n]_{\mathbb{N}} = \{1, 2, \dots, n\}$. Une telle équipotence ou sa réciproque $f : [1, n]_{\mathbb{N}} \rightarrow E$ définit une énumération des éléments de E (le premier $f(1)$, ..., le n^{e} $f(n)$). Les principes suivants sont admis :

1. *Égalité* Si A, B sont des ensembles finis : $|A| = |B|$ ssi A et B sont équipotents.
2. *Additivité* Si A, B sont des ensembles finis disjoints : $|A \cup B| = |A| + |B|$
3. *Multiplication* Si A, B sont des ensembles finis : $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

— ou bien infinis, mais restant équipotents à \mathbb{N} . On dit alors que E est infini dénombrable. L'existence de la bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ définit encore une énumération des éléments de E .

Propriété : Soient A, B deux ensembles finis, $|A| \leq |B|$ ssi il existe une application injective $f : A \rightarrow B$.

Propriété : \mathbb{N} est le plus petit ensemble infini. Il est stable par addition, multiplication et exponentiation. Il est *bien ordonné* : toute partie non vide admet un plus petit élément. L'ensemble des parties de \mathbb{N} n'est pas dénombrable.

1. (*Exercice déjà vu en Calculus*) Soient E, F deux ensembles finis non vides, et A une partie de E , B une partie de F .
 - (a) Faites un diagramme sagittal, pour une application f quelconque, des ensembles E, F, A, B de tailles respectives 5,6,3,2. Déterminez, avec votre exemple $f(A)$, $f^{-1}(B)$.
 - (b) En général quelle est la relation entre $|A|$ et $|f(A)|$? ($<$, $=$, \leq). Et entre $|B|$ et $|f^{-1}(B)|$?
 - (c) Que deviennent vos relations quand f est injective? surjective?
 - (d) Y a-t-il une réciproque, c.-à-d. une relation entre les cardinaux qui impliquerait le caractère injectif, ou surjectif de f ?
 - (e) Les propriétés précédentes sont elles encore vraies en cas d'ensembles infinis dénombrables?
2. Montrez que l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
3. *Variante de la preuve du 2^e sens de la propriété 1 p.8 (contraposée)*
Montrez par récurrence que si $|A| > |B|$ alors il n'existe pas d'application injective $f : A \rightarrow B$

2 Dénombrement

Notations et rappels : On suppose $|A| = n$ et $|B| = p$

— $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, $|A \times B| = |A| \times |B|$, $|\{f : A \rightarrow B\}| = |B^A| = |B|^{|A|} = p^n$,

— Nombre de permutations de A (fonction bijective de A vers A) : $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$,

— Nombre d'applications injectives de B vers A , supposant $n \geq p$:

$$\mathcal{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1).$$

— Nombre de parties de A ayant pour cardinal p , supposant $0 \leq p \leq n$:

$$\mathcal{C}_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \dots \times 2 \times 1},$$

— $\mathcal{C}_n^p = \mathcal{C}_{n-1}^{p-1} + \mathcal{C}_{n-1}^p$, $\mathcal{C}_n^p = \mathcal{C}_n^{n-p}$, $\mathcal{C}_n^0 = 1$.

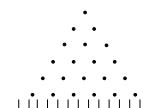
— **Principe des tiroirs :** Si n tiroirs sont occupés par $n+1$ objets alors il existe au moins un tiroir occupé par au moins deux objets.

Plus formellement, soit $f : A \rightarrow B$, avec $|B| = p$, $|A| = n = p+1$, alors il existe $b \in B : |f^{-1}(\{b\})| \geq 2$.

Généralisation : $n = p \cdot q + r$, $0 \leq r < p$. Si p tiroirs sont occupés par n objets, alors il existe au moins un tiroir qui contient $\lceil n/p \rceil$ objets. (Attention quand $r \neq 0$, $\lceil n/p \rceil = q + 1$).

1. *Examen 2009 :* Soit un ensemble de 6 couleurs $\text{Coul} = \{R, V, J, B, M, C\}$, et un ensemble de points $E = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, avec $n \geq 1$.
Un *coloriage* associe à **chaque** point de E **une** couleur.
 - (a) Montrez qu'un coloriage est une application. De quel ensemble vers quel ensemble?
 - (b) En fonction de n , indiquez le nombre de coloriages différents possibles.

- (c) Si $n = 5$ peut-on assurer que dans chaque coloriage on aura au moins 2 points de la même couleur ?
- (d) Et si $n = 6$? $n = 7$?
- (e) Toujours avec 6 couleurs, combien de points faut-il pour être certain que chaque coloriage ait au moins 3 points de la même couleur ?
- (f) Quand $n = 3$ on *tricolorie* les 3 points p_1, p_2, p_3 en leur associant 3 couleurs différentes. Combien existe-t-il de tricoloriages différents ?
2. On suppose que chaque étudiant de l'ensemble E des 92 étudiants d'une mention de Licence suit exactement les mêmes modules. On souhaite les répartir en 3 groupes A, B, C .
- (a) Combien y a-t-il de répartitions possibles ? Attention on accepte toutes les répartitions même celles où un ou deux groupes sont vides.
- (b) Étant donnée une répartition, pouvez-vous être certain qu'au moins un groupe comporte 32 étudiants ? 31 étudiants ? 30 étudiants ? Justifiez votre réponse. (*Oui/Non ne sera pas pris en compte.*)
- (c) On impose dans cette question que les groupes A et B comportent exactement 31 étudiants. On veut le nombre de répartitions avec cette contrainte.
3. On doit corriger 212 copies. Peu importe la méthode de correction, on doit attribuer une note, qui est un entier entre 0 et 20, à chacune des 212 copies. On appelle *notation* une telle association.
- (a) Combien dénombre-t-on de notations différentes ?
- (b) Existe-t-il des notations qui ne sont pas des applications surjectives de l'ensemble des copies vers l'ensemble des notes ? Justifiez votre réponse.
- (c) Existe-t-il des notations qui sont des applications injectives de l'ensemble des copies vers l'ensemble des notes ? Justifiez votre réponse.
- (d) Parmi les assertions suivantes, vous indiquerez celles qui sont vraies ou fausses :
- Dans chaque notation, au moins 10 copies ont la même note.
 - Dans chaque notation, au moins 11 copies ont la même note.
 - Dans chaque notation, au moins 12 copies ont la même note.
4. Soit $E = \{A, B, C, D\}$.
- (a) Combien de mots de trois lettres peuvent être formés à partir de l'alphabet E en autorisant les répétitions ?
- (b) sans autoriser les répétitions ?
- (c) commençant par un A , avec puis sans répétitions ?
- (d) ne contenant pas de A , avec puis sans répétitions ?
- (e) contenant exactement un A , avec puis sans répétitions ?
5. À l'aide des notions ensemblistes d'applications, d'injections, de surjections, d'ensemble des parties, formaliser et dénombrer les manières de
- (a) mettre n boules distinctes dans p pots numérotés : Formaliser c'est :
- Indiquer quel est l'ensemble des boules B , quel est son cardinal.
 - Indiquer quel est l'ensemble des pots P , quel est son cardinal.
 - Indiquer ce qu'est une « manière de mettre les n boules dans les pots » : est-ce une partie de B ? une partie de P ? un élément de $B \times P$? Une relation ? Une fonction ?
 - Quand vous aurez répondu à la question qui précède, servez-vous des résultats du cours pour indiquer le nombre total de « manière de mettre les n boules dans les pots »
- (b) mettre n boules distinctes chacune dans un pot différent parmi p , avec les mêmes indications que ci-dessus.
- (c) (***) n boules distinctes dans p pots, chacun recevant au moins une boule (dénombrement difficile), idem.
6. On fait tomber des billes le long d'une planche à six rangées de clous ; à chaque clou, la moitié des billes tombe à droite du clou, l'autre à gauche. En faisant tomber 2^6 billes du haut de la planche, combien tombent dans chaque godet ?



Notations et rappels

— Un ensemble $E \subseteq \mathcal{U}$ est défini inductivement par la donnée de sa base : un ensemble $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, et par un ensemble Ω de règles tels que :

Base $\mathcal{B} \subseteq E$.

Règles — Pour chaque règle interne $f_i \in \Omega$ d'arité n , pour chaque $x_1, \dots, x_n \in E : f_i(x_1, \dots, x_n) \in E$.

— Pour chaque règle externe $f_e \in \Omega$ d'arité n définie de $K_1 \times \dots \times K_q \times E \times \dots \times E$ dans E (K_1, \dots, K_q étant des ensembles parfaitement définis, $q < n$) et pour chaque n -uplet (x_1, \dots, x_n) avec $x_1 \in K_1, \dots, x_q \in K_q, x_{q+1} \in E, \dots, x_n \in E : f_e(x_1, \dots, x_n) \in E$.

E est le plus petit ensemble vérifiant ces deux propriétés. (Au sens de l'inclusion ensembliste).

— Une démonstration par induction structurale se fait sur le schéma suivant : Soit E un ensemble défini par induction à partir de (\mathcal{B}, Ω) . Soit $P : E \rightarrow \text{Booléen}$ le prédicat qu'on veut démontrer. Pour montrer que $P(x)$ est vrai pour chaque élément x de E , il suffit de prouver :

— $\forall x \in \mathcal{B} : P(x)$

— Pour chaque règle interne $f_i \in \Omega$ d'arité n définie de E^n dans E et pour chaque $x_1, \dots, x_n \in E : si $P(x_1), \dots, P(x_n)$ sont vraies alors $P(f_i(x_1, \dots, x_n))$ est vraie.$

— Pour chaque règle externe $f_e \in \Omega$ d'arité n définie de $K_1 \times \dots \times K_q \times E \times \dots \times E$ dans E ($q \leq p, q < n$), pour chaque (x_1, \dots, x_q) dans $K_1 \times \dots \times K_q$ et pour chaque (x_{q+1}, \dots, x_n) dans $E^{n-q} : si $P(x_{q+1}), \dots, P(x_n)$ sont vraies, alors $P(f_e(x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_n))$ est vraie.$

Autrement dit, si P est vraie pour chaque élément de la base et si P est conservée par applications des règles de constructions, alors P est vraie pour tout l'ensemble ainsi défini.

1. Comment définissez-vous des expressions représentées avec la notation postfixée ENP , dans laquelle les éléments de base sont les entiers, les seules opérations/règles sont $+$ et \times , il n'y a pas de parenthèse, et l'opération suit ses 2 opérands ?

Par exemple, $\boxed{5}$, $\boxed{3 \ 12 \ +}$, $\boxed{3 \ 2 \ 5 \ + \ \times}$ sont des éléments de ENP ,

alors que $\boxed{3 \ + \ 2 \ \times \ 5}$ n'en est pas un.

2. **Définition 0.1.** Soit A un ensemble de lettres appelé alphabet. On définit A^* le monoïde libre sur A , ensemble des mots ou suite de lettres de A .

On note $u = a_1 a_2 \dots a_n$ le mot (a_1, a_2, \dots, a_n) . Sa longueur est $|u| = n$. Le mot de longueur 0 est noté ϵ .

L'opération du monoïde est la concaténation notée \cdot telle que $(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_p) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p)$

Soit A^* l'ensemble des mots construits à partir d'un alphabet comportant 3 lettres, $A = \{a, b, c\}$.

On définit alors E partie de A^* par l'induction suivante :

— *Base* : Les mots ϵ, a, b et c sont dans E .

— *Règle* : $\forall u \in E : a.u.a, b.u.b$ et $c.u.c \in E$

(a) Démontrez, en utilisant uniquement la définition inductive de E , que chaque mot de E est un palindrome. On rappelle qu'un mot w est un palindrome si $w = {}^t w$, où ${}^t w$ est l'écriture « inverse » de w — de droite à gauche. Exemple $ababbaba$ est un palindrome, alors que $ababcaba$ n'en est pas un.

(b) Démontrez, par récurrence sur la longueur d'un palindrome de A^* , que tout palindrome est dans E .

(c) Conclusion ?

3. Trouvez un schéma d'induction pour construire :

(a) (***) Les mots de $\{0, 1\}^*$ qui ne sont pas des palindromes.

(b) Les expressions algébriques bien parenthésées $EABP$, et dont les éléments de base sont les entiers, et les éléments construits le sont en utilisant des parenthèses et les opérations binaires $+$ et \times .

Par exemple, $5, (3 + 12), (3 \times (2 + 5))$ sont des éléments de $EABP$, alors que $3 + 2 \times 5$ et (5) n'en sont pas.

(c) L'écriture en binaire (*i.e.* avec l'alphabet $\{0, 1\}$) des entiers pairs, sans 0 inutile en tête.

(d) Les mots de l'alphabet $\{0, 1\}$ ne contenant pas deux 0 consécutifs.

4. Soit $V = \{0, 1\}$. Soit E la partie de $V^* \times V^*$ définie inductivement par :

Base $\forall w \in V^* : (w.0, w.1) \in E$. *Règles* si $(u, v) \in E$ alors $(u.1, v.0) \in E$.

Les couples $(11, 00), (11, 100), (0111, 1000), (1011, 1100), 1100, 1111)$ appartiennent-ils à E ? Montrer que $(u, v) \in E$ si et seulement si $|u| = |v|$ et v est l'écriture binaire du successeur de l'entier dont l'écriture binaire est u .

En déduire que E peut être défini par le schéma inductif suivant :

Base $(0, 1) \in E$ *Règles* si $(u, v) \in E$ alors $(0.u, 0.v) \in E, (1.u, 1.v) \in E, (u.1, v.0) \in E$.

5. Définir inductivement les applications suivantes :

(a) *miroir* : $V^* \rightarrow V^*$ telle que $miroir(x_1x_2 \dots x_n) = {}^t(x_1x_2 \dots x_n)$.

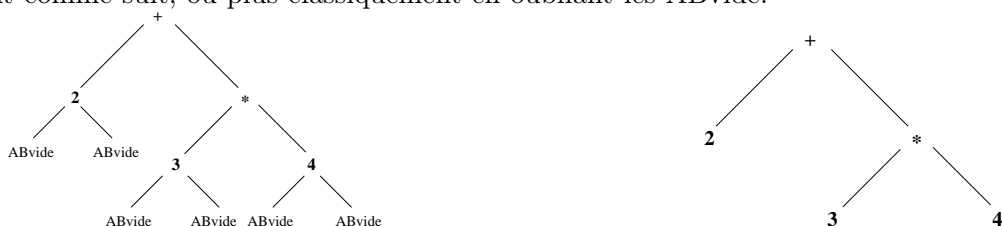
(b) *nbocc* : $V \times V^* \rightarrow V^*$ telle que $nbocc(x, w) = |w|_x$.

6. Rappel de cours :

Définition 0.2. L'ensemble *ArbreBin* des arbres binaires étiquetés sur un alphabet A est défini inductivement par :

- *Base* : $ABvide \in ArbreBin$
- *Induction* : $\forall a \in A, \forall g, d \in ArbreBin : (a, g, d) \in ArbreBin$

Soit $A = (+, (2, ABvide, ABvide), (*, (3, ABvide, ABvide), (4, ABvide, ABvide)))$ un arbre binaire qu'on représente graphiquement comme suit, ou plus classiquement en oubliant les *ABvide*.



Soit $AB : EABP \rightarrow ArbreBin$ la fonction qui associe un arbre binaire à une expression algébrique bien parenthésée de l'exercice **3b**.

- (a) Soit $x = (2 * (((3 + 4) * (5 * 6)) + 7) * 8)$. Représentez $AB(x)$.
- (b) Définissez la fonction *AB* par induction.
- (c) Trouvez la relation entre le nombre de parenthèses ouvrantes d'une expression algébrique bien parenthésée et le nombre d'opérations de cette même expression.
- (d) Prouvez par induction structurale votre formule.

1 Relations binaires

Notations et rappels	(\mathcal{R} est une relation binaire de X dans X)
\mathcal{R} est réflexive	si $\forall x \in X, x\mathcal{R}x$
\mathcal{R} est symétrique	si $\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$
\mathcal{R} est antisymétrique	si $\forall x, y \in X, (x\mathcal{R}y) \text{ et } (y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$
\mathcal{R} est transitive	si $\forall x, y, z \in X, (x\mathcal{R}y) \text{ et } (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

1. Définition :

- $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r\}$ et $Z = \{1, 2, 3\}$.
- $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ est définie par : $b\mathcal{R}q$ et $\forall y \in Y : a\mathcal{R}y$
- $\mathcal{S} \subseteq Y \times Z$ est définie par : $\forall n \in Z : p\mathcal{S}n$ et $\forall y \in Y : y\mathcal{S}3$

Explicitez, par un dessin ou en extension les relations \mathcal{R} , \mathcal{S} , la relation composée $\mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Explicitez la relation inverse de \mathcal{T} et définissez là en fonction d'une composée des relations inverses : \mathcal{R}^{-1} et \mathcal{S}^{-1}

2. — Soient $A = \{1, 2, 3\}$, \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux relations binaires définies dans A par la matrice d'incidence

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et l'ensemble } \mathcal{R}' = \{(2, 1), (3, 2), (3, 1)\}.$$

Expliciter les relations binaires union et intersection, ainsi que les carrées de celles-ci ($\mathcal{R}^2, (\mathcal{R} \cup \mathcal{R}')^2, \dots$). Étudier leurs qualités (réflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie, fonctionnalité, ordre, équivalence).

- Soient \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux relations binaires définies dans le même ensemble. Montrer que si \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont transitives alors $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ est transitive. Que penser de $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$?
- Prouver qu'une relation binaire \mathcal{R} définie dans un ensemble A est transitive si et seulement si $\mathcal{R}^2 \subseteq \mathcal{R}$.

3. Soit la relation \mathcal{R} définie dans \mathbb{N} par $x\mathcal{R}y$ si $y = x + 1$. La relation \mathcal{R} est-elle fonctionnelle ? réflexive ? symétrique ? transitive ? Définissez \mathcal{R}^{-1} , \mathcal{R}^2 , \mathcal{R}^3 , \mathcal{R}^+ et \mathcal{R}^* .

Rappel : $\mathcal{R}^+ = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{R}^n$ et $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^+ \cup I$, où I est l'identité.

2 Équivalences

Notations et rappels : Une relation d'équivalence \sim , définie dans un ensemble X , est réflexive, transitive et symétrique ; $\bar{x} = \{z \in X : x \sim z\}$ est la classe de $x \in X$; $z \in \bar{x}$ en est un représentant ; l'ensemble des classes $X / \sim = \{\bar{x} : x \in X\}$ est l'ensemble quotient.

1. Dire si les relations binaires suivantes sur les êtres humains sont des équivalences.

- À un humain on associe son père biologique,
- À un humain on associe un humain qui fait partie de sa « fratrie ». (Une fratrie est composée de personnes qui ont les mêmes deux parents biologiques.)
- À un humain on associe un humain qui a la même date de naissance.

2. Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $Y = \{a, b, c\}$. \mathcal{R} la relation binaire définie sur $\mathcal{P}(X)$ par $M\mathcal{R}N \Leftrightarrow M \cap Y = N \cap Y$.

- (a) Soient les parties $A = \{a, b, d\}$, $B = \{a, b, e\}$, $C = \{a, d, e\}$. Quelles sont celles qui sont en relation ?
- (b) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
- (c) Quelle est \bar{A} la classe de A ?
- (d) Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble quotient ?

3 Ordres

Notations et rappels : X est un ensemble, Y est une partie non vide de X . Une relation binaire dans X qui est <i>réflexive</i> et <i>transitive</i> et <i>antisymétrique</i> est dite <i>relation d'ordre</i> dans X . On la note dans la suite \leq .			
<i>Ordre total</i> (X, \leq) :	tous les éléments de X sont comparables, sinon c'est un ordre <i>partiel</i>		
une <i>Chaîne</i> de (X, \leq) :	un sous-ensemble Y où l'ordre est total		
<i>Intervalle</i> de (X, \leq) :	$[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$	Peut être vide	
Le minimum de Y :	$\min(Y) \in Y$ et $\forall y \in Y, \min(Y) \leq y$.	N'existe pas forcément	
Le maximum de Y :	analogue		
(X, \leq) est <i>bien ordonné</i> :	toute partie non vide de X admet un minimum Exemple : (\mathbb{N}, \leq) . Contre-exemple : (\mathbb{Z}, \leq)		
$m \in X$ un minimal de (X, \leq) :	$\forall x \in X, x \leq m \Rightarrow x = m$.	N'existe pas forcément	
Un maximal	analogue		
$m \in X$ un minorant de Y dans (X, \leq) :	$\forall y \in Y, m \leq y$.	N'existe pas forcément	
un majorant	analogue		
La borne inférieure de Y dans (X, \leq) , notée $\inf_X(Y)$:	$\forall x \in X, (\forall y \in Y, x \leq y) \Rightarrow x \leq \inf_X(Y)$. Si Y admet un minimum, c'est également la borne inférieure.	N'existe pas forcément	
La borne supérieure	analogue		
(X, \leq) est un <i>treillis</i>	$\forall x, y \in X, \exists m, M \in X, m = \inf_X(\{x, y\}) \leq x, y \leq M = \sup_X(\{x, y\})$.		
Dans (X, \leq) , y <i>couvre</i> x	$x \leq y, x \neq y$ et il n'existe pas d'éléments entre eux $x \leq z \leq y \Rightarrow x = z$ ou $z = y$		
Si (X, \leq) est un ordre fini, son <i>diagramme de Hasse</i> :	un diagramme dont les sommets sont les éléments de X et les arêtes (représentées du bas vers le haut) relient un sommet x plus bas qu'un sommet y si y couvre x .		

1. Soient les relations binaires :
 - (a) \subseteq dans $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$.
 - (b) $|$ dans $[1, 10]_{\mathbb{N}}$ où $|$ dénote "est un diviseur de".
 - (c) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
 - (d) Dans $\mathcal{P}(E) : (A, B) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow |A| \leq |B|$.
 - (e) Dans $\mathcal{P}(E) : (A, B) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow |A| < |B|$.
 - (f) $<$ dans l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} .

Quel est le type de ces relations : ordre, pré-ordre (pas antisymétrique), ordre strict (un ordre privé de la diagonale) ?

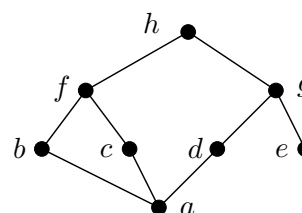
Dans le cas où ces relations sont des ordres, donnez des exemples d'éléments comparables, incomparables (x est comparable à y si $(x, y) \in \mathcal{R}$ ou $(y, x) \in \mathcal{R}$).

Dans le cas où ces relations sont des ordres finis, explicitez la relation de *couverture* en l'écrivant en extension.

Dans le cas où ces relations sont finies, représentez le graphe de chacune d'entre elles.

Dans le cas où ces relations sont finies et sont des ordres, représentez le diagramme de Hasse de ces ordres.

2. Identifier les minimum, maximum, éléments minimaux, maximaux, bornes inf et sup, s'ils existent de la relation d'ordre codée par le diagramme de Hasse suivant : Localiser toutes ses chaînes et donner leurs majorants et minorants.

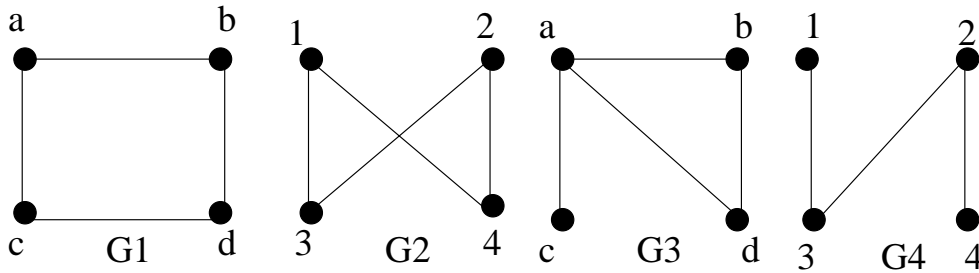


3. Dans l'ensemble $E = [1, 10]_{\mathbb{N}}$ ordonné par la relation $|$ – “est un diviseur de” – soit $A = \{2, 3, 6\}$.
Quels sont les éléments *minimaux*, *maximaux* de A ? A est-il *minoré*, *majoré* dans E ? A admet-il un *minimum*, un *maximum* dans E ? A admet-il un *minimum*, un *maximum*, une *borne inférieure*, une *borne supérieure*? A est-il une *anti-chaîne* de E ?
Représentez le graphe de la relation, puis son diagramme de Hasse.
4. Soit E un ensemble ordonné par \mathcal{R} . E n'est pas nécessairement fini et \mathcal{R} n'est pas nécessairement total. A étant une partie de E , que penser des affirmations suivantes?
- (a) Si x est maximum de A , alors x est maximal de A .
 - (b) Si x est maximal de A , alors x est maximum de A .
 - (c) Si A est fini, et si x est l'unique élément maximal de A alors x est maximum de A .
 - (d) Si A est une chaîne non vide de E alors A admet au plus un élément maximal.
 - (e) Si A est une chaîne non vide de E alors A possède un minimum.

3. Soit le graphe non orienté $G = (X, E)$ défini par $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et sa matrice d'adjacence $M[1..5, 1..5]$:

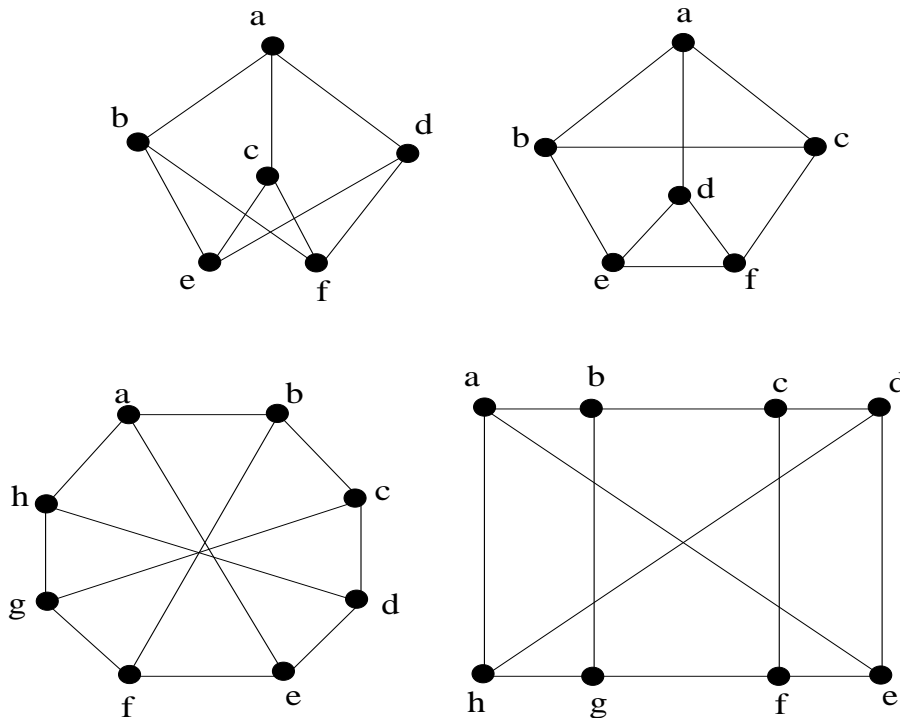
M	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	1
2	1	1	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	1	1	1	0	0
5	1	0	0	0	0

- (a) Comment interpréter le fait que $M[4, 3] = 1$? et $M[2, 5] = 0$?
 - (b) Représenter graphiquement G .
 - (c) Définir la fonction *Voisins*.
 - (d) Quels sont les boucles, les sommets isolés de G ?
4. Soit le graphe non orienté G défini par ses sommets $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et sa fonction *Voisins* : $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ telle que : $Voisins(1) = \{2, 3\}$, $Voisins(2) = \{1, 2, 3, 4\}$, $Voisins(3) = \{1, 2, 4\}$, $Voisins(4) = \{2, 3\}$
- (a) Représentez graphiquement G .
 - (b) Définissez E ensemble des arêtes de G .
 - (c) Définissez A la matrice d'adjacence de G .
5. Les graphes G_1 et G_2 sont-ils isomorphes ? Même question avec G_3 et G_4 .



Quel est le graphe complémentaire de G_1 .

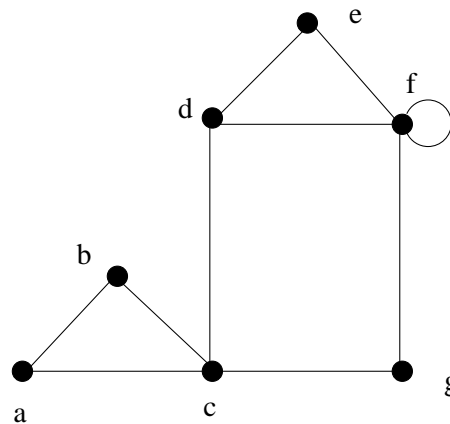
6. Un graphe est dit p -régulier si chaque sommet est de degré p . Quelles sont les paires de graphes qui sont isomorphes, parmi les 4 graphes 3-régulier suivants :



7. Montrez que dans un graphe non orienté le nombre de sommets de degré impair est pair.
8. Comptons un peu : Un ensemble de n sommets $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ est fixé.
- (a) Combien y a-t-il de graphes non orientés sans boucles $G = (X, E)$?
 - (b) Combien y a-t-il de graphes non orientés $G = (X, E)$ comportant une seule boucle ?
 - (c) Combien y a-t-il de graphes non orientés $G = (X, E)$ comportant exactement deux boucles ? p boucles ?
 - (d) En déduire le nombre de graphes non orientés $G = (X, E)$.

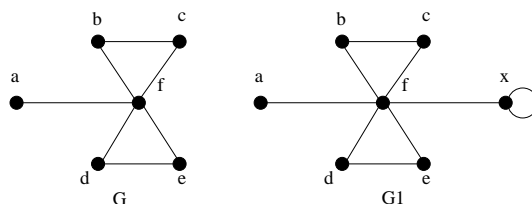
1 Cheminement non orienté. Connexité.

1. Soit $G = (X, E)$ le graphe de la figure ci-contre.



- (a) Exhibez une ag -marche qui ne passe pas 2 fois par la même arête. Énumérez toutes les ag -marches de ce type ?
- (b) Exhibez un ag -chemin. Énumérez tous les ag -chemins ?
- (c) Exhibez une ag -marche qui passe plusieurs fois par un même sommet et plusieurs fois par une même arête. À votre avis combien existe-t-il de ag -marches de ce type ?
- (d) Existe-t-il une ag -marche ne passant pas plusieurs fois par une même arête mais plusieurs fois par un même sommet ? Et une marche ne passant pas plusieurs fois par un même sommet mais plusieurs fois par une même arête dans G ?
- (e) Existe-t-il une marche passant par tous les sommets de G sans passer plusieurs fois par la même arête (marche hamiltonienne) ? Et une marche passant par toutes les arêtes de G sans passer plusieurs fois par la même (marche eulérienne) ?
- (f) G est-il connexe ? Combien de composantes connexes dans $G(X \setminus \{c\})$?
- (g) Exhibez tous les cycles de G . Exhibez toutes les marches fermées de G passant plusieurs fois par un sommet mais pas plusieurs fois par une arête.
- (h) Existe-t-il un cycle passant par tous les sommets de G (cycle hamiltonien) ? Et une marche fermée passant exactement 1 fois par toutes les arêtes de G (marche eulérienne fermée) ?

2. (a) Le graphe G de la figure ci-contre est une af -marche ne passant pas plusieurs fois par la même arête, exhibez-la.



- i. Quelle est la parité des degrés des extrémités et celle des autres sommets de cette marche ?
- ii. Le graphe G_1 de la figure est une ax -marche ne passant pas plusieurs fois par la même arête, exhibez-la. Même question sur la parité des degrés des sommets de G_1 .

(b) Soit maintenant $G = (X, E)$ un graphe non orienté quelconque.

- i. Soit C une xy -marche de G ne passant pas plusieurs fois par la même arête, et G' le sous-graphe de G défini par C (ses sommets sont ceux de C , ses arêtes sont celles de C). Démontrez que le degré, dans G' , des sommets différents des extrémités est pair. Le degré des extrémités est-il toujours impair ?
- ii. Quel est ce degré, toujours dans G' , quand la marche est un chemin ?
- iii. Quel est ce degré, toujours dans G' , quand C est un cycle ?

3. Dans cette question les graphes sont non orientés.

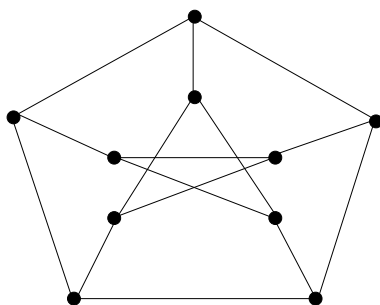
- (a) Dessinez des graphes d'ordre 2,3,4,5 qui sont connexes, dont deux sommets sont de degré 1 et tous les autres sont de degré 2.
- (b) Soit un graphe $G = (X, E)$ d'ordre n supérieur ou égal à 2 et non connexe. Que pensez vous de la connexité de $G' = G + x$ obtenu par adjonction d'un nouveau sommet x de degré 1 dans G' ?
- (c) Démontrez par récurrence sur $n \geq 2$ l'ordre de G , que tout graphe connexe dont deux sommets sont de degré 1 et tous les autres sont de degré 2 est un chemin.
- (d) En déduire que tout graphe connexe dont chaque sommet est de degré 2 est un cycle.
- (e) Que pouvez-vous déduire pour un graphe non connexe dont chaque sommet est de degré 2 ?

4. Dans cette question, les graphes sont non orientés :

Définition.

- Un graphe non orienté $G = (X, E)$ est *biparti* s'il existe une bipartition $\{X_1, X_2\}$ de X telle chaque arête de E a une extrémité dans X_1 et l'autre dans X_2 .
- Un graphe est dit p -régulier si chaque sommet est de degré p .

- (a) Dessinez, quand c'est possible, des graphes 1-réguliers d'ordre 1,2,3,4,5,6. Quelle est la structure d'un graphe 1-régulier ?
- (b) Montrer qu'un graphe 1-régulier est biparti. (Récurrence?)
- (c) Dessinez un graphe biparti connexe d'ordre 5 et possédant un cycle.
- (d) Montrer que dans un graphe biparti il n'y a pas de cycle de longueur impaire.
- (e) Dessinez, quand c'est possible, des graphes 2-réguliers connexes d'ordre 1,2,3,4,5,6. Quelle est la structure d'un graphe 2-régulier connexe? Et d'un graphe 2-régulier quelconque?
- (f) Quel est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe 2-régulier connexe?
5. Soit $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Le graphe de Petersen $P = (X, E)$ est le graphe non orienté défini comme suit : ses sommets sont les paires (sous-ensembles de cardinal 2) d'éléments de S , deux sommets sont joints si et seulement si ce sont des paires disjointes d'éléments de S .
- (a) Montrer que P est isomorphe au graphe dont la représentation suit :



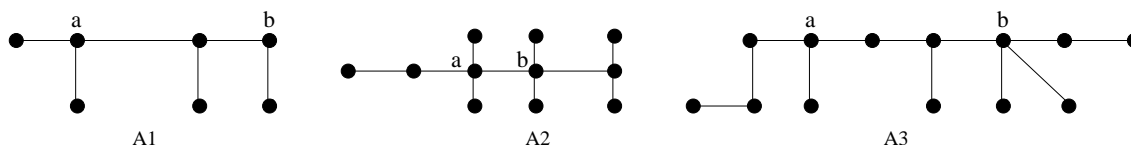
- (b) Exhiber trois cycles de P
- (c) Exhiber une marche passant exactement une fois par tous les sommets de P (marche hamiltonienne)
- (d) Montrer que pour tout sommet $x \in X$ le sous-graphe induit par $X \setminus \{x\}$ contient un cycle passant par tous les sommets de P (cycle hamiltonien). P contient-il des cycles hamiltoniens?
6. *Lemme de l'isthme* : Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté connexe. Un *isthme* de G est une arête $e \in E$ telle que le sous-graphe $(X, E \setminus \{e\})$ ne soit pas connexe.
- (a) Donnez un exemple d'isthme dans un graphe 3-régulier sans boucles.
- (b) Montrez que les 3 propositions suivantes sont équivalentes :
- (i) $e = \{x, y\}$ est un isthme de G
 - (ii) (x, y) est le seul xy -chemin de G .
 - (iii) e n'appartient à aucun cycle de G
7. \mathcal{CSB} est défini sur l'ensemble des graphes non orientés par le schéma inductif suivant :
- base : le graphe à un sommet sans boucle est élément de \mathcal{CSB}
 - règle : si $G = (X, E) \in \mathcal{CSB}$. Soit alors un graphe $G' = (X', E') = G + x$ obtenu en ajoutant un nouveau sommet x et des arêtes qui ne sont pas des boucles, et telles que $d(x) \neq 0$ dans G' . Tout graphe G' ainsi construit est dans \mathcal{CSB} .
- (a) Dessinez des graphes de \mathcal{CSB} d'ordre 2,3,4,5.
- (b) On peut démontrer que \mathcal{CSB} est la classe des graphes connexes sans boucles (ce n'est pas ce qui est demandé ici). En déduire que si G est connexe alors $m \geq n - 1$.
- (c) Un graphe tel que $m < n - 1$ est-il connexe?
- (d) Un graphe tel que $m > n$ est-il connexe?
- (e) Donner une condition suffisante sur m et n pour que G soit connexe.

2 Arbres

- Utilisez le schéma inductif donné en cours pour exhiber (dessiner) tous les arbres possédant 6 sommets. Évidemment, vos graphes ne sont pas étiquetés (vous ne donnez pas de nom au sommets), et sont donc obtenus « à un isomorphisme près ».
- \mathcal{A} est défini sur l'ensemble des graphes non orientés par le schéma inductif suivant :
 - base : le graphe à un sommet sans boucle ;
 - règle : si $G \in \mathcal{A}$ alors « tout graphe obtenu en ajoutant un sommet de degré 1 à G » est dans \mathcal{A} .
 - Montrer que \mathcal{A} est la classe des arbres.
 - En déduire qu'un arbre est un graphe biparti.
- Soit G un graphe connexe non vide.
 - Faites un dessin d'un graphe d'ordre 5, connexe et ne contenant pas de sommet pendant.
 - Rappelez le *Lemme fondamental des graphes connexes*.
 - En utilisant ce lemme, montrez que si G est connexe et ne contient pas de sommet pendant alors G contient un cycle.
- Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$.
 Soit $f : X \times X \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction définie par $f(x, y)$ est la longueur minimale d'une xy -marche.
 Soit $P_n(G, a, b)$ la proposition : « $G = (X, E)$ est un graphe connexe quelconque d'ordre n . $a, b \in X$ sont deux sommets quelconques de X . Il existe une numérotation (x_1, \dots, x_n) des sommets de X telle que $x_1 = a, x_n = b$ et $\forall 1 \leq i < n : f(x_i, x_{i+1}) \leq 3$ ».

(a) Démontrez que f est une distance sur X .

(b) Numérotez les sommets des arbres A_i suivants de sorte que $P_n(A_i)$, où n est l'ordre de A_i , soit vérifiée :



(c) En suivant bien pas à pas toutes les indications données dans l'énoncé de cette question, vous allez montrer par induction sur le nombre d'arêtes que tout arbre A d'ordre $n \geq 2$ vérifie $P_n(A, a, b)$ où a, b sont deux sommets quelconques. On examinera deux cas suivant que $f(a, b) \geq 2$ ou $f(a, b) = 1$.

Plus précisément :

- Quelle est la base de l'induction ?
- Écrivez (HI) l'hypothèse d'induction.
- Soit A un arbre possédant $n + 1$ sommets (pour quel n ?). Soient a, b deux sommets quelconques de A . Envisageons les deux cas :

$f(a, b) > 1$.

- À quel(s) arbre(s) exemple(s) de la figure ceci correspond-il ? Faites d'abord la démarche exposée ci-dessous, pas à pas pour le(s) exemple(s) concerné(s). Vous ferez la démonstration générale ensuite.
- Appelez c le successeur de a dans l'unique ab -marche de A .
- Enlevez l'arête $\{a, c\}$ de A . Vous obtenez deux composantes connexes C_1, C_2
- Appliquez (HI) à chaque composante connexe, en choisissant convenablement les sommets a', b', a'', b'' vous obtiendrez $P_q(C_1, a', b')$ et $P_r(C_2, a'', b'')$. Et vous conclurez pour ce cas. Attention, nous n'avons pas envisagé les cas limites simples, où l'une des composantes connexes a un seul sommet.

$f(a, b) = 1$

- À quel(s) arbre(s) exemple(s) de la figure ceci correspond-il ? Faites d'abord la démarche exposée ci-dessous, pas à pas pour le(s) exemple(s) concerné(s). Vous ferez la démonstration générale ensuite.
- Enlevez l'arête $\{a, b\}$ de A . Vous obtenez deux composantes connexes C_1, C_2

- Appliquez (HI) à chaque composante connexe, en choisissant convenablement les sommets a', b', a'', b'' vous obtiendrez $P_q(C_1, a', b')$ et $P_r(C_2, a'', b'')$. Et vous conclurez pour ce cas. Attention, nous n'avons pas envisagé les cas limites simples, où l'une des composantes connexes a un seul sommet.
- (d) En déduire que tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 2$ vérifie $P_n(G, a, b)$ pour deux quelconques de ses sommets.
5. On considère un arbre $G = (X, E)$. On utilise dans cet exercice les définitions qui suivent :
- L'*excentricité* d'un sommet x , notée $exc_G(x)$ est la longueur maximale des chemins d'extrémité x .
 - Le *rayon* de G , noté $r(G)$, est la valeur minimale des excentricités des sommets de G : $r(G) = \min_{x \in X} (exc_G(x))$.
 - Un *centre* de G est un sommet dont l'excentricité est égale au rayon.
 - Si G est un arbre non réduit à un sommet ou une arête on appelle G' le graphe obtenu à partir de G en enlevant **tous** ses sommets pendants.
- (a) Exhiber l'ensemble des arbres non isomorphes ayant 4 ou 5 sommets. Calculer leurs centres
- (b) Démontrer qu'un sommet pendent d'un arbre ne peut être un centre.
- (c) Démontrer que G' est un arbre.
- (d) Démontrer que pour tout sommet x de G' : $exc_{G'}(x) = exc_G(x) - 1$.
- (e) Démontrer que G et G' ont mêmes centres.
- (f) Démontrer que tout arbre a un ou deux centres, et que si un arbre a deux centres alors ceux-ci sont adjacents.

Définition.

- Une **marche orientée** de $G = (X, U)$ est une suite (x_0, \dots, x_h) de sommets de G telle que $h \geq 0$ et $\forall i, 0 \leq i < h - 1, (x_i, x_{i+1}) \in U$.
 x_0 est l'origine de la marche orientée, x_h son extrémité, h sa longueur.
 Pour $h = 0$ on a une marche orientée de longueur 0 (x_0).
 Une marche orientée w **passé par** l'arc (a, b) si les sommets a et b sont consécutifs dans w .
 On note $\mathbf{x_0x_h}$ -**marche orientée** une marche orientée d'origine x_0 et d'extrémité x_h .
- **Chaîne.** Une chaîne (x_0, \dots, x_h) est marche orientée telle que tous ses sommets sont deux à deux distincts.

Définition.

- L'ensemble des **descendants** d'un sommet x de $G = (X, U)$, noté $Desc_G(x)$ est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une xy -chaîne.
- L'ensemble des **ascendants** d'un sommet x de $G = (X, U)$, noté $Asc_G(x)$ est l'ensemble des sommets y pour lesquels il existe une yx -chaîne.
- Une **racine** r de $G = (X, U)$ est un sommet tel que $Desc_G(r) = X$.

Définition.

- Un **circuit** de $G = (X, U)$ est une xx -chaîne de longueur non nulle dont tous ses sommets sont distincts deux à deux (sauf l'origine et l'extrémité). C'est donc une séquence définie pour $h \geq 0$: $(x_0 = x, \dots, x_h, x_{h+1} = x)$ telle que $\forall i, 0 \leq i \leq h, (x_i, x_{i+1}) \in U$ et $\forall i, j, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$. La longueur du circuit est $h + 1$.

Définition. Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. On définit la relation \approx_{fc} sur X par : $x \approx_{fc} y$ ssi il existe un xy -marche orientée et une yx -marche orientée dans G .

La relation \approx_{fc} est une relation d'équivalence sur X (immédiat).

Définition. Les classes d'équivalence de \approx_{fc} sont appelées **composantes fortement connexes** de G .

Définition. On appelle **arborescence** tout arbre orienté possédant une racine.

Définition.

- La **fermeture transitive** d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe $G^t = (X, U^t)$ avec $(x, y) \in U^t \Leftrightarrow$ il existe une xy -marche orientée dans G de longueur ≥ 1 .
- La **fermeture réflexive** d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe obtenu en rajoutant un boucle sur chaque sommet.
- La **fermeture réflexo-transitive** d'un graphe orienté $G = (X, U)$ est le graphe $G^* = (X, U^*)$ avec $(x, y) \in U^* \Leftrightarrow$ il existe une xy -marche orientée dans G de longueur ≥ 0 .
 Remarque : $(x, y) \in U^* \Leftrightarrow y \in Desc_G(x)$

1. Dessinez un graphe orienté à 4 sommets $G = (X, U)$ tel que :

- G est un arbre, mais pas une arborescence.
- G possède une racine, mais n'est pas un arbre.

2. **Loup, chèvre et chou**

Un batelier doit faire passer une rivière à un loup, une chèvre et un chou, dans une barque si petite qu'il ne peut emporter que l'un d'entre eux au maximum à chaque voyage. Pour des raisons évidentes, il ne peut laisser le loup et la chèvre seuls sur une rive, pas plus que la chèvre et le chou.

Utilisez un graphe pour montrer de quelle manière ces trois passagers peuvent être transportés d'une rive à l'autre. Attention, on ne demande pas de trouver la/une solution ! Il s'agit dans cet exercice de modéliser le problème posé en termes de graphes : orienté/non orienté ? quels sommets ? arc/arêtes ? puis de définir la réponse en terme de recherche dans un graphe : une marche, une marche orientée, un cycle, ...

3. Pour tout graphe orienté G , on note $S(G)$ l'ensemble des sources de G (sommets sans arcs entrants) et $P(G)$ l'ensemble des puits de G (sommets sans arcs sortants).

- Soit $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(4, 5), (3, 5), (5, 2), (5, 1), (3, 1), (6, 5)\})$. Calculer $S(G)$ et $P(G)$. G est-il un graphe sans circuit ?

- (b) Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit. Démontrer que le graphe obtenu en ajoutant à U l'ensemble des arcs $P(G) \times S(G)$ est un graphe fortement connexe.
4. On considère le graphe orienté
 $G = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{(5, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 4), (3, 1), (3, 2)\})$.
- (a) Le graphe G est-il connexe ? est-il fortement connexe ?
- (b) Construisez la fermeture transitive, les composantes fortement connexes de G .
- (c) On considère le graphe orienté
 $H = (\{a, b, c, d, e\}, \{(b, a), (b, c), (b, d), (d, b), (d, a), (e, d), (c, d)\})$. Les graphes G et H sont-ils isomorphes ?
5. Soit le graphe $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{(1, 3), (3, 4), (5, 5), (6, 4), (5, 7), (3, 6), (6, 6), (4, 3), (2, 5)\})$.
- (a) Construire la fermeture transitive de G , ses composantes connexes et ses composante fortement connexes.
- (b) La fermeture réflexo-transitive de G est-elle un ordre ?
- (c) Définissez et représentez un graphe réduit $G' = (X', U')$ de G .
- (d) La fermeture réflexo-transitive de G' est-elle un ordre ?
- (e) Trouvez deux numérotations compatibles des sommets de G' .